เฉลยการบ้านครั้งที่ 2

1. Show that an overdamping oscillator can cross the equilibrium point one time at most.

   เฉลย

   Solution ของ overdamping เขียนได้เป็น

$$x = C_1 e^{-\frac{r}{2m}t + t\sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}}} + C_2 e^{-\frac{r}{2m}t - t\sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}}}$$

   หรือ

$$x = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t} \qquad (1)$$

   เมื่อ

$$\alpha_1 = \frac{r}{2m} + \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}} \quad \text{และ } \alpha_2 = \frac{r}{2m} - \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}}$$

   เราสามารถแสดงให้เห็นว่า x(t) ตัดแกน x ได้ครั้งเดียวและเกิดขึ้นเมื่อ

$$0 = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$$

$$\therefore t = \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)} \ln\left(\frac{-C_1}{C_2}\right) \qquad (2)$$

จากสมการที่ (2) พบว่าจะมี $\frac{-C_1}{C_2}$ เพียงค่าเดียวที่จะทำให้ t > 0 ซึ่งแสดงถึงเวลาที่ x(t) ตัดแกน x ได้เพียงค่าเดียว #

2. Show that the damping ratio ζ is related to the longitudinal decrement via the following relationship

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

   เฉลย

   โดยอาศัยนิยาม ζ = damping ratio = $\frac{r}{2\sqrt{sm}}$

   และ $\delta = \frac{r\tau'}{2m}$

$$\therefore \zeta = \frac{r\tau'}{2m} \cdot \frac{m}{\tau'\sqrt{sm}} = \frac{\delta}{\tau'\omega} \quad \text{เมื่อ } \omega = \sqrt{s/m} \text{ และ } \omega = \sqrt{\omega'^2 - \frac{r^2}{4m^2}}$$

$$\therefore \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \qquad \#$$

3. Show that the quality factor of an electrical LCR series is $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ where $\omega_0^2 = {}^1/_{LC}$

เฉลย

โดยอาศัยนิยามของ *Q value ;* $Q = 2\pi \frac{energy\ sotred}{energy\ loss\ per\ \ cycle}$

สำหรับในวงจร *RLC* แบบอนุกรม พลังงานที่เก็บว้าหาได้จาก $\frac{1}{2} L I_{max}^2$

ในขณะที่พลังงานที่สูญเสียในแต่ละรอบหาได้จาก $power \times \ time\ for\ a\ cycle = I_{RMS}^2 R \times \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$= \frac{1}{2} I_{max}^2 R \times \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\therefore Q = 2\pi \frac{\left(\frac{1}{2} L I_{max}^2\right)}{\left(\frac{1}{2} I_{max}^2 R \times \frac{2\pi}{\omega_0}\right)} = \frac{\omega_0 L}{R} \text{ เมื่อ } \omega_0^2 = {}^1/_{LC} \quad \#$$